数理解析研究所講究録 1290 巻 2002 年 83-94

ISOVARIANT MAPS BETWEEN REPRESENTATION SPACES

大阪大学大学院理学研究科・長崎 生光 (Ikumitsu Nagasaki)
Department of Mathematics, Graduate School of Science
Osaka University

1. 序

Borsuk-Ulam の定理は，変換群の立場からは次のように述べられる．

定理 1.1 (Borsuk-Ulam の定理). 位数 2 の巡回群 C_2 が球面 S^n, S^m に対心的に作用しているとする．このとき連続 C_2 同変写像 $f : S^n \to S^m$ が存在するならば，$n \leq m$ が成り立つ．

Borsuk-Ulam の定理は様々な拡張が知られているが，A. G. Wasserman [5] は上の C_2 同変写像 $f : S^n \to S^m$ が isovariant であることに注目し，Borsuk-Ulam の定理の isovariant version を考察した．その結果の一つは，次のように述べられる．

定理 1.2 (Isovariant Borsuk-Ulam 定理). G をコンパクト・可解リー群とする．表現空間の間の連続 G-isovariant 写像 $f : V \to W$ が存在するならば，不等式

$$\dim V - \dim V^G \leq \dim W - \dim W^G$$

が成り立つ．

Remark. 一般のコンパクト・リー群で上の不等式が成り立つかどうかは，未解決問題である．しかし，上より弱い形（弱 Isovariant Borsuk-Ulam 定理）であれば一般に成り立つ．その詳細は [3] で論じられる．

上の定理は，不動点集合の余次元の間の不等式が G-isovariant 写像 $f : V \to W$ の存在性の一つの障害であることを言っている．これ以外に何か障害があるのだろ

2000 *Mathematics Subject Classification.* 57S17, 55M20.
Key words and phrases. Borsuk-Ulam theorem, isovariant map, representation.

うか？この小論では，このような問題意識のもと，群 G が有限アーベル群の場合に，Isovariant Borsuk-Ulam 定理の逆を考察したい．

G-isovariant 写像の定義を思い出しておこう．G 空間の間の G-isovariant 写像 $f: X \to Y$ とは，$G_x = G_{f(x)}$ $(\forall x \in X)$ が成り立つ G 同変写像のことである．(G_x は x のアイソトロピー群を表す.) 以後，写像はすべて連続性を仮定する．G を有限可解群とし，V, W を G の直交表現空間とする．(混乱のおそれがなければ直交表現空間を単に表現という.) $f: V \to W$ は G-isovariant 写像とする．容易にわかるように，任意の部分群の組 H, K $(H \triangleleft K)$ に対して，$f^H: V^H \to W^H$ は自然に K/H-isovariant 写像と見なすことができる（補題 2.1 参照）．したがって，定理 1.2 から，次の不等式を得る．

$$(C_{V,W}): \quad \dim V^H - \dim V^K \leq \dim W^H - \dim W^K \ (\forall H \triangleleft \forall K).$$

Isovariant Borsuk-Ulam 定理の逆問題をここでは次のように定式化する．

問題 A. G は可解群とする．表現 V, W が条件 $(C_{V,W})$ をみたすならば，G-isovariant 写像 $f: V \to W$ は存在するか？

この問題は完全には解決されていないが，ある種のアーベル群については，肯定的な解答をもつ．たとえば，§2 で次のことが示される．

定理 2.6. G はアーベル p 群とする．表現 V, W が条件 $(C_{V,W})$ をみたすならば，G-isovariant 写像 $f: V \to W$ が存在する．

アーベル p 群以外でも問題 A が肯定的である群が存在する．ユニタリー表現の場合には河野 [2] によって示されたが，位数が $p^n q^m$ (p, q は異なる素数）の巡回群がそのような例であることを §3 で示す．

2. アーベル p 群の場合

はじめに isovariant 写像について基本的なことを述べておく．証明はいずれも容易である．G は有限群とする．

補題 2.1. (1) G-isovariant 写像 $f: X \to Y$ の作用を部分群 H に制限して得られる写像 $\mathrm{Res}_H f$ は H-isovariant である．

(2) H は正規部分群とする．G-isovariant 写像 $f: X \to Y$ の H 不動点集合への制限写像 $f^H: X^H \to Y^H$ は G/H-isovariant である．

(3) H は正規部分群とし，$g : X^H \to Y^H$ が G/H-isovariant とする．射影 $G \to G/H$ により X^H, Y^H を G 空間とみたとき，g は G-isovariant 写像である．

(4) $f : X_1 \to Y_1$ と $g : X_2 \to Y_2$ が G-isovariant ならば，$f \times g : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$, $f * g : X_1 * X_2 \to Y_1 * Y_2$ も G-isovariant である．($*$ は結を表す.)

任意の G 表現 V に対して，V_G により V^G の直交補表現を表そう．また $S(V)$ は V の単位球面を表す.

補題 2.2. V, W を G 表現とする．次の命題は互いに同値である.

(1) G-isovariant 写像 $f : V \to W$ が存在する.

(2) G-isovariant 写像 $f : V_G \to W_G$ が存在する.

(3) G-isovariant 写像 $f : S(V) \to S(W)$ が存在する.

(4) G-isovariant 写像 $f : S(V_G) \to S(W_G)$ が存在する.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): $i : V_G \to V$ を包含写像，$p : W \to W_G$ を射影とする．包含写像 i は明らかに G-isovariant ある． また G が W^G 上自明に作用することから p も G-isovariant であることがわかる． したがって合成写像 $p \circ f \circ i : V_G \to W_G$ は G-isovariant となる.

(2) $\Rightarrow$ (4): $(V_G)^G = (W_G)^G = 0$ かつ $f^{-1}(0) = \{0\}$ であるので，G-isovariant 写像 $g : S(V_G) \to S(W_G)$ が $g(x) = f(x)/\|f(x)\|$ によって定義できる.

(4) $\Rightarrow$ (3): $g : S(V^G) \to S(W^G)$ を任意の連続写像とする． G は自明に作用しているので g は G-isovariant である．このとき $f * g : S(V) \cong S(V_G) * S(V^G) \to S(W_G) * S(W^G) \cong S(W)$ は G-isovariant 写像となる．(3) $\Rightarrow$ (1): $f : S(V) \to S(W)$ の開錐をとることにより G-isovariant 写像 $\tilde{f} : V \to W$ が得られる.

以後この節では，G は有限アーベル群とする． 表現論からよく知られた事実を思い出しておこう．V は G 表現とし，$V \cong V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$ を既約分解とする. G はアーベル群なので，各 V_i は（実）1 または 2 次元である． 任意の部分群 H に対して，$V(H) = \oplus_{i:\mathrm{Ker}\, V_i = H} V_i$ とおく．ここで $\mathrm{Ker}\, V_i$ は表現準同型 $\rho_{V_i} : G \to O(n)$ ($n = 1$ or 2) の核である．核が自明のとき，その表現は忠実であるという．つぎのことはよく知られている.

補題 2.3. V は G の既約表現とする．$K = \mathrm{Ker}\, V$ とおく.

(1) G/K は巡回群である.

(2) V^K $(=V)$ は忠実な既約 G/K 表現である．逆に U が忠実な既約 G/K 表現ならば，射影 $G \to G/K$ を通して U は核 K をもつ既約 G 表現とみなされる．したがって，核 K をもつ既約 G 表現と忠実な既約 G/K 表現の間に 1 対 1 対応がある．

補題 2.3 からもわかるようにアーベル群の表現は本質的に巡回群の表現に帰着される．そこで位数 n の巡回群 C_n の既約表現について思い出しておこう．C_n の生成元を g とする．ユニタリー表現 $U_i\,(=\mathbb{C})$ が g の作用を $gz = \xi^i z$（$z \in \mathbb{C}$）とすることにより定義される．ここで $\xi = \exp(2\pi\sqrt{-1}/n)$ である．この U_i $(0 \le i \le n-1)$ が C_n のすべての（互いに異なる）既約なユニタリー表現である．基礎体を $\mathbb{R}$ に制限すると, 直交表現が得られる.（ただし，既約になるとは限らない.） この直交表現も同じ記号 U_i で表すことにする．$1 \le i \le [(n-1)/2]$ ならば，U_i は直交表現としても既約であり互いに異なる．また直交表現として $U_i \cong U_{n-i}$ である．U_0, $U_{n/2}$ (後者は n が偶数の場合) は直交表現として既約ではない．実際 $U_0 \cong 2\mathbb{R} := \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $U_{n/2} \cong 2\mathbb{R}^- := \mathbb{R}^- \oplus \mathbb{R}^-$ となってる．ここで $\mathbb{R}$ は自明な 1 次元表現，$\mathbb{R}^-$ は非自明な 1 次元表現をあらわす (i.e., g は $\mathbb{R}^-$ 上 $gx = -x$ で作用する)．また，$\mathrm{Ker}\, U_i \cong C_{(i,n)}$ であることに注意しておこう．特に U_i が忠実になるのは i と n が互いに素であることが必要十分である．

isovariant 写像の存在について，つぎのことは基本的である．

補題 2.4. V と W は同じ核をもつ既約 C_n 表現とする． そのとき C_n-isovariant 写像 $f : V \to W$ が存在する．

証明. V, U が自明表現のときは明らかである．非自明の場合，補題 2.1，2.3 より V と W は忠実としてよい．したがって $n \neq 2$ のときは，$V = U_i$, $W = U_j$ (i, j は n と素)，$n = 2$ のときは，$V = W = \mathbb{R}^-$ としてよい．前者の場合，C_n-isovariant 写像がつぎのようにして構成できる．正整数 k で $ik \equiv 1 \mod n$ となるものをとる．写像 $f : U_i \to U_j$ を $f(z) = z^{kj}$ として定義する．このとき f は isovariant である．実際，C_n 同変写像であることと $f^{-1}(0) = \{0\}$ であることは容易にわかる． C_n は $U_i - \{0\}$ と $U_j - \{0\}$ 上に自由に作用しているので，f は isovariant である． 後者の場合は恒等写像をとればよい．

G がアーベル群のとき，$\mathcal{D}$ を G/H が巡回群となる部分群 H 全体の集合とする．補題 2.3 (1) より $V = \oplus_{H\in\mathcal{D}} V(H)$ となる．(ただし $V(H) = 0$ となることもありうる．)

補題 2.4 からつぎのことがわかる．

命題 2.5. G はアーベル群とし，V, W は G 表現とする．各 $H \in \mathcal{D} - \{G\}$ について，$\dim V(H) \leq \dim W(H)$ が成り立てば，G-isovariant 写像 $f : V \to W$ が存在する．

証明. 補題 2.1 (4) より，$V(H)$ と $W(H)$ の間に G-isovariant 写像が存在することを示せば十分である．さらに，$V(H), W(H)$ は核 H をもつ既約表現の直和であるので，補題 2.1 (3)，2.3 より，G が巡回群 C_n で $H = 1$ の場合を考えれば十分である．このとき $\dim V(1) \leq \dim W(1)$ であるので，補題 2.4 を用いると $V(1)$ から $W(1)$ への間の C_n-isovariant 写像が構成できる．

次に序で述べた次の結果を証明しよう．

定理 2.6. G はアーベル p 群とする．表現 V, W が条件 $(C_{V,W})$ をみたすならば，G-isovariant 写像 $f : V \to W$ が存在する．

証明. 命題 2.5 より，$\dim V(H) \leq \dim W(H)$ $(\forall H \in \mathcal{D} - \{G\})$ を示せばよい．

まず任意の $H \in \mathcal{D} - \{G\}$ に対して，H を真に含む最小の部分群 K が存在する．実際 K_1, K_2 を H を真に含む極小の部分群とすると，K_i/H $(i = 1, 2)$ は巡回 p 群 G/H の部分群であるので，$K_1 \leq K_2$ または $K_1 \geq K_2$ が成り立つ．したがって極小性から $K_1 = K_2$ となる．

$V = \oplus_{H\in\mathcal{D}} V(H)$, $W = \oplus_{H\in\mathcal{D}} W(H)$ が条件 $(C_{V,W})$ をみたすとする．$H \in \mathcal{D} - \{G\}$ とし，K を H を真に含む最小の部分群とする．このとき $V^H = \oplus_{H\leq L} V(L)$ である．K の最小性から $V^K = \oplus_{K\leq L} V(L) = \oplus_{H<L} V(L)$ が成り立つ．したがって

$$\dim V^H - \dim V^K = \dim V(H)$$

を得る．同様に

$$\dim W^H - \dim W^K = \dim W(H)$$

が成り立つ．ゆえに条件 $(C_{V,W})$ より $\dim V(H) \leq \dim W(H)$ が成り立つ．

Remark. 上の証明では，$(C_{V,W})$ より弱い条件：

$(C'_{V,W})$: $\dim V^H - \dim W^H \leq \dim W^H - \dim W^H$ $(H < K,\ K/H$ が素数位数$)$
のみ仮定すれば十分であるが，容易にわかるように G がアーベル群のとき，条件 $(C_{V,W})$ と $(C'_{V,W})$ は同値である．

3. 位数が p^nq^m の巡回群の場合

一般には，条件 $(C_{V,W})$ から $\dim V(H) \leq \dim W(H)$ は導けない．例をあげよう．G は位数 pq の巡回群 C_{pq}（p, q は相異なる素数）とする． 前節の記号のもと，$V = U_1$, $W = U_p \oplus U_q$ とおく．このとき V, W は条件 $(C_{V,W})$ をみたすが，$\dim V(1) = \dim U_1 = 2 > \dim W(1) = 0$ となる．しかしこの例においても，isovariant 写像は存在する．実際 $f : V \to W$ を $f(z) = (z^p, z^q)$ で定義すると f は C_{pq}-isovariant 写像になる（[4]）．

G はアーベル群とする．$H \in \mathcal{D} - \{G\}$ に対して，U_H を G/H 表現 U_1 から誘導される核 H をもつ G 表現とする．同様に $\mathbb{R}^-$ から誘導される表現を $\mathbb{R}^-_H$ で表す．U_H は $G/H \not\cong C_2$ のとき，既約である．$G/H \cong C_2$ のときは，直交表現として $U_H \cong \mathbb{R}^-_H \oplus \mathbb{R}^-_H$ と既約分解される．さて，上で述べた例を位数が p^nq^m のアーベル群の場合に一般化しよう．そのために W 列の概念を導入しておく．

定義. 部分群の列 $\{H_1, \cdots, H_r; K_1, \cdots, K_{r+1}\}$ $(r \geq 1)$ が $\mathcal{D} - \{G\}$ で（長さ r の）W 列であるとは，次の条件をみたすときをいう：

(1) $H_i \not\leq H_j$ かつ $H_i \not\geq H_j$ $(i \neq j)$,

(2) $H_i < K_i$, $H_i < K_{i+1}$ で $K_i \cap K_{i+1} = H_i$ $(\forall i)$,

(3) K_i/H_i はすべて p ベキ，K_{i+1}/H_i はすべて q ベキ．

命題 3.1. G を位数 p^nq^m のアーベル群とする．$\{H_1, \cdots, H_r; K_1, \cdots, K_{r+1}\}$ を W 列とする．そのとき，G-isovariant 写像：

$$f : U_{H_1} \oplus \cdots \oplus U_{H_r} \to U_{K_1} \oplus \cdots \oplus U_{K_{r+1}}$$

が存在する．

証明のために必要な補題をいくつか準備する．

補題 3.2. G を位数 p^nq^m のアーベル群とする．$\{H_1, \cdots, H_r; K_1, \cdots, K_{r+1}\}$ は $\mathcal{D} - \{G\}$ の W 列とする．このとき以下が成り立つ．

(1) $K_i \not\leq K_j$ かつ $K_i \not\geq K_j$ $(i \neq j)$.

(2) 任意の $H_{i_1}, \ldots, H_{i_k}$ $(1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq r)$ に対して，$\bigcap_s H_{i_s} = H_{i_1} \cap H_{i_k}$. 任意の $K_{i_1}, \ldots, K_{i_k}$ $(1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq r+1)$ に対して，$\bigcap_s K_{i_s} = K_{i_1} \cap K_{i_k}$.

(3) $H_i \cap H_j \in \mathcal{D}$ $(i < j)$.

(4) $K_i \cap K_j = H_i \cap H_{j-1}$ $(i < j)$.

証明. (1): W の定義 (2) から明らかである.

(2): G_l で G のシロー l 群 $(l = p \text{ or } q)$ を表す．$G = G_p \times G_q$ となる．G の部分群 H は $H_p \times H_q$ の形に表される．$H_i = H_{i,p} \times H_{i,q}$, $K_i = K_{i,p} \times K_{i,q}$ と表しておく. K_i/H_i は p ベキ，K_{i+1}/H_i は q ベキなので，$H_{i,p} < K_{i,p}$, $H_{i,q} = K_{i,q}$, $H_{i,p} = K_{i+1,p}$, $H_{i,q} < K_{i+1,q}$ が従う．ゆえに，

$$H_{i,p} > H_{i+1,p}, \quad H_{i,q} < H_{i+1,q}, \quad K_{i,p} > K_{i+1,p}, \quad K_{i,q} < K_{i+1,q}$$

がわかる．このことから容易に $\bigcap_s H_{i_s} = H_{i_1} \cap H_{i_k}$, $\bigcap_s K_{i_s} = K_{i_1} \cap K_{i_k}$ が従う.

(3): 上の包含関係から $H_i \cap H_j = H_{j,p} \times H_{i,q}$ となる．G/H_i と G/H_j は巡回群なので，$G_p/H_{j,p}$ と $G_q/H_{i,q}$ も巡回群である．したがって，$G/H_i \cap H_j \cong G_p/H_{j,p} \times G_q/H_{i,q}$ は巡回群となる.

(4): 同様にして，$K_i \cap K_j = K_{j,p} \times K_{i,q}$ かつ $H_i \cap H_{j-1} = H_{j-1,p} \times H_{i,q}$ が成り立つ．(2) の証明でみたように，$K_{j,p} = H_{j-1,p}$ および $K_{i,p} = H_{i,q}$ である．ゆえに，$K_i \cap K_j = H_i \cap H_{j-1}$ である.

補題 3.3. $V = U_{L_1} \oplus \cdots \oplus U_{L_r}$ $(L_i \in \mathcal{D} - \{G\})$ とする．任意の $z = (z_1, \ldots, z_r) \in V$ でのアイソトロピー群 G_z は $G_z = \bigcap_{i:z_i \neq 0} L_i$ となる.

証明. $z_i \neq 0$ のとき $G_{z_i} = L_i$ であり，$z_i = 0$ のとき $G_{z_i} = G$ である．$G_z = \bigcap_i G_{z_i}$ なので結果が従う.

命題 3.1 を証明しよう.

命題 3.1 の証明. $a_i = |K_i/H_i|$, $b_i = |K_{i+1}/H_i|$ とおく．a_i と b_i $(1 \leq i \leq r)$ は互いに素であることに注意する．写像 f を

$$f(z_1, \ldots, z_r) = (z_1^{a_1}, z_1^{b_1} + z_2^{a_2}, \ldots, z_{r-1}^{b_{r-1}} + z_r^{a_r}, z_r^{b_r})$$

により定義する．この写像が isovariant であることを示す．写像

$$h_k : U_H \to U_K; f(z) = z^k$$

$(H < K \text{ in } \mathcal{D} - \{G\},\ k = |K/H|)$ は同変であることから f は同変写像である．$V = U_{H_1} \oplus \cdots \oplus U_{H_r}$，$W = U_{K_1} \oplus \cdots \oplus U_{K_{r+1}}$ とおく．$z = (z_1, \ldots, z_r)$ を V の任意の元とする．$s = \min\{i | z_i \neq 0\}$，$t = \max\{i | z_i \neq 0\}$ とおく．このとき $f(z)$ は

$$f(z) = (0, \ldots, 0, z_s^{a_s}, z_s^{b_s} + z_{s+1}^{a_{s+1}}, \ldots, z_{t-1}^{b_{t-1}} + z_t^{a_t}, z_t^{b_t}, 0, \ldots, 0)$$

となる．補題 3.2 (2)，3.3 より，$G_z = H_s \cap H_t$ と $G_{f(z)} = \bigcap_{s \le i \le t+1} G_{z_i} = K_s \cap K_{t+1}$ がわかる．したがって補題 3.2 (4) より $G_z = G_{f(z)}$ となる．すなわち f は isovariant 写像である．

上で構成された f を基本 isovariant 写像と呼ぼう．

表現 V, W は条件 $(C_{V,W})$ をみたすものとする．V から W への isovariant 写像の存在性を考察するために，V，W をより簡単な状況に帰着させよう．まず補題 2.2 より $V^G = W^G = 0$ としてよい．$\alpha(H) = \dim W(H) - \dim V(H)$ とおく．$\alpha(H) \geq 0$ ならば，$V(H)$ から $W(H)$ の部分表現 W' $(\dim V(H) = \dim W')$ への isovariant 写像が存在する．このとき $\overline{V} := V - V(H)$, $\overline{W} := W - W'$ は条件 $(C_{\overline{V},\overline{W}})$ をみたしている．したがって isovariant 写像 $\overline{f} : \overline{V} \to \overline{W}$ の存在が言えれば，写像の直和を考えることによって isovariant 写像 $f : V \to W$ の存在が言える．同様に $\alpha(H) < 0$ であれば，$V(H)$ の部分表現 V' $(\dim V' = \dim W(H))$ から $W(H)$ への isovariant 写像が存在し，$\overline{V} := V - V'$, $\overline{W} := W - W(H)$ は条件 $(C_{\overline{V},\overline{W}})$ をみたす．したがって，V, W として，次の条件をみたすものを考えれば十分である．

(D) 各 H に対して，(1) $V(H) = 0, W(H) \neq 0$, (2) $V(H) \neq 0, W(H) = 0$ または (3) $V(H) = 0, W(H) = 0$.

さらに，補題 2.4 より

(E) $G/H \neq C_2$ のとき，$V(H) = a_H U_H$，$W(H) = b_H U_H$ としてよい．($G/H = C_2$ のときは，$V(H) = a_H \mathbb{R}_H^-$，$W(H) = b_H \mathbb{R}_H^-$ となる.)

$\mathcal{E}_+$ を $\alpha(H) > 0$ をみたす部分群 H 全体の集合，$\mathcal{E}_-$ は $\alpha(H) < 0$ をみたす部分群 H 全体の集合とする．

以後，巡回群 $G = C_{p^n q^m}$ (p, q は異なる素数，m, $n \geq 1$) の場合を考えよう．この場合は，問題 A は肯定的である．すなわち，以下の結果が成り立つ．

定理 3.4. G は位数 $p^n q^m$ の巡回群とする．表現 V, W が条件 $(C_{V,W})$ をみたすならば，G-isovariant 写像 $f : V \to W$ が存在する．

証明のためにいくつかの補題を準備する.

補題 3.5. 条件 $(C_{V,W})$, (D) の下，$\mathcal{E}_-$ での極大部分群 H に対して，H を含む部分群 $K, K' \in \mathcal{E}_+$ で，K/H は巡回 p 群，K'/H は巡回 q 群となるものが存在する.

証明. $L/H \cong C_l$ $(l = p, q)$ となる部分群 L をとる．条件 $(C_{V,W})$ と H の極大性から,

$$\dim V(H) = \dim V^H \le \dim W^H - \dim W^L$$

が得られる．l とは異なる方の素数を l' とする.

$$\mathcal{S}_{l'}(H) = \{M \ge H \,|\, |M/H| = l'^k \ (k \ge 0)\}$$

とおく．M が $\mathcal{S}_{l'}(H)$ に属するのは，$M \ge H$ かつ $M \not\ge L$ であることが必要十分であることに注意すれば,

$$\dim W^H - \dim W^L = \sum_{M \in \mathcal{S}_{l'}(H)} \dim W(M)$$

がとなることがわかる．したがって

$$\dim V(H) \le \sum_{M \in \mathcal{S}_{l'}(H)} \dim W(M).$$

$V(H) \ne 0$ なので，ある $M \in \mathcal{S}_{l'}(H)$ について $W(M) \ne 0$ となる.

この補題から次のことがわかる.

系 3.6. 条件 $(C_{V,W})$, (D) の下,

(1) $G/H \not\cong C_2$ $(\forall H \in \mathcal{E}_-)$.

(2) $V(H)$ は U_H の直和の場合に帰着される．((E) 参照.)

また，次のことにも注意しよう.

補題 3.7. 条件 $(C_{V,W})$, (D) の下，$W(H)$ は U_H の直和の場合に帰着される $(H \in \mathcal{E}_+)$.

証明. $G/H \not\cong C_2$ のときは (E) からわかる．$G/H \cong C_2$ $(q = 2)$ としよう．このとき $W(H) \cong b\mathbb{R}_H^-$ $(b = \dim W(H))$ となっている．b が偶数ならば，$U_H \cong 2\mathbb{R}_H^-$ なので $W(H) \cong \frac{b}{2}U_H$ となる．b が奇数のとき，$W' = W - \mathbb{R}_H^-$ $(\subset W)$ とおく．このとき V, W' は条件 $(C_{V,W'})$ をみたす．実際，任意の $L < K$ に対して，条件 $(C_{V,W})$ より

$$\dim V^L - \dim V^K \le \dim W^L - \dim W^K$$

となる．$K \leq H$ または $L \not\leq H$ ならば，容易に

$$\dim W^L - \dim W^K = \dim W'^L - \dim W'^K$$

であることがわかる．したがって，条件 $(C_{V,W'})$ をみたす．$L \leq H$ かつ $K \not\leq H$ のとき，$\dim W^L - \dim W^K$ は奇数であり，

$$\dim W^L - \dim W^K = \dim W'^L - \dim W'^K + 1$$

が成り立っている．$\dim V^L - \dim V^K$ は系 3.6(2) より偶数になるので，$(C_{V,W})$ より

$$\dim V^L - \dim V^K < \dim W^L - \dim W^K$$

を得る．ゆえに

$$\dim V^L - \dim V^K \leq \dim W'^L - \dim W'^K$$

となり，このときも条件 $(C_{V,W'})$ をみたしている．

以上のことから，条件 $(C_{V,W})$ をみたす表現 V, W として，以下の形の場合を考察すれば十分であることがわかる．

$$V = \oplus_{H\in\mathcal{E}_-} V(H), \quad V(H) = a_H U_H,$$

$$W = \oplus_{H\in\mathcal{E}_+} W(H), \quad W(H) = b_H U_H.$$

このような V, W の組を簡約対と呼ぶことにする．

定理 3.4 を示そう．

定理 3.4 の証明．今までの議論により，V, W は簡約対として考えればよい．

このとき isovarinat 写像 f を命題 3.1 の基本 isovariant 写像の直和として構成しよう．$\dim V$ に関する帰納法で示す．$V = 0$ のときは明らか．補題 3.5 より，W 列 $S = \{H_1, \ldots, H_r; K_1, \ldots, K_{r+1}\}$ で次の性質をみたすものがとれる．

(1) $\{H_1, \ldots, H_r\} \subset \mathcal{E}_-$ かつ $\{K_1, \ldots, K_{r+1}\} \subset \mathcal{E}_+$,

(2) 各 H_i は $\mathcal{E}_-$ で極大,

(3) S は極大，すなわち，性質 (1)，(2) をみたし S を真に含む W 列は存在しない．

$V' := \oplus_i U_{H_i}$，$W' := \oplus_i U_{K_i}$ とおく．命題 3.1 より isovariant 写像 $f' : V' \to W'$ が存在する．$\overline{V} = V - V'$，$\overline{W} = W - W'$ とおく．このとき $\overline{V}, \overline{W}$ は条件 $(C_{\overline{V},\overline{W}})$ をみたす．このことは次の補題で示す．したがって isovariant 写像 $\overline{f} : \overline{V} \to \overline{W}$ が帰納法の仮定より存在する．ゆえに isovariant 写像 $f := \overline{f} \oplus f'$ が存在する．

補題 3.8. $\overline{V}$, $\overline{W}$ は条件 $(C_{\overline{V},\overline{W}})$ をみたす.

証明. $K/H \cong C_l$ $(l = p,\, q)$ となる部分群 $H < K$ に対して，条件 $(C_{\overline{V},\overline{W}})$ の不等式を示せばよい（§2 の最後の Remark 参照）．同じことなので $l = p$ とする．$\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_r\}$，$\mathcal{K} = \{K_1, \ldots, K_{r+1}\}$ とおく．$\mathcal{S}_q(H) = \{L \leq G \mid L \geq H, |L/H| = q^k\}$ とおく．以下のことは容易に確かめられる.

$$\dim V^H - \dim V^K = \sum_{L \in \mathcal{S}_q(H) \cap \mathcal{E}_-} \dim V(L),$$

$$\dim W^H - \dim W^K = \sum_{L \in \mathcal{S}_q(H) \cap \mathcal{E}_+} \dim V(L),$$

$$\dim V'^H - \dim V'^K = \sum_{L \in \mathcal{S}_q(H) \cap \mathcal{H}} \dim U_L,$$

$$\dim W'^H - \dim W'^K = \sum_{L \in \mathcal{S}_q(H) \cap \mathcal{K}} \dim U_L.$$

条件 $(C_{V,W})$ より

$$\dim V^H - \dim V^K \leq \dim W^H - \dim W^K$$

が成り立っている．$C_{p^n q^m}$ の部分群の包含関係をみれば，次のいずれかが成り立っていることがわかる.

(1) ある i が存在して，$S_q(H) \cap \mathcal{H} = \{H_i\}$, $S_q(H) \cap \mathcal{K} = \{K_{i+1}\}$.

(2) $S_q(H) \cap \mathcal{H} = \emptyset$, $S_q(H) \cap \mathcal{K} = \{K_1\}$.

(3) $S_q(H) \cap \mathcal{H} = \mathcal{S}_q(H) \cap \mathcal{K} = \emptyset$.

(1) の場合,

$$\dim V'^H - \dim V'^K = \dim W'^H - \dim W'^K \ (= 2)$$

したがって

$$\dim \overline{V}^H - \dim \overline{V}^K \leq \dim \overline{W}^H - \dim \overline{W}^K$$

となる.

(2) の場合，$\mathcal{S}_q(H) \cap \mathcal{E}_-$ は空集合である．実際，ある $L \in \mathcal{S}_q(H) \cap \mathcal{E}_-$ があったとする．補題 3.5 を用いると，$S = \{H_1, \ldots, H_r; K_1, \ldots, K_{r+1}\}$ を含むより大きな W 列が存在することになり矛盾する．したがって，$\dim V^H - \dim V^K = 0$ が成り立つ．また $K_1 \in \mathcal{S}_q(H) \cap \mathcal{E}_+$ より，$\dim W^H - \dim W^K \geq 2$ を得る．一方,

$\dim V'^H - \dim V'^K = 0, \dim W'^H - \dim W'^K = 2$ であるから

$$(0 =)\ \dim \overline{V}^H - \dim \overline{V}^K \leq \dim \overline{W}^H - \dim \overline{W}^K$$

が従う.

(3) の場合, 明らかに

$$\dim V'^H - \dim V'^K = 0,\ \dim W'^H - \dim W'^K = 0$$

であるから

$$\dim \overline{V}^H - \dim \overline{V}^K \leq \dim \overline{W}^H - \dim \overline{W}^K$$

が従う. 以上で証明が終わる.

4. 最後に—その他の例と問題

補題 3.8 は, 非巡回群の場合には一般には成り立たない. したがって定理 3.4 において G が巡回群でないとき, 同様な証明法は通用しない. しかし, 問題 A の反例も現時点では見つかっていない.

問題 A が肯定的なその他のアーベル群の例として $C_p \times C_p \times C_q$ がある. この場合は, 一般の位置の議論を援用することにより証明できる. さらに非アーベル群でも問題 A が肯定的なものがある. その一例は位数 $2p^n$ の二面体群である (p は素数). この場合は, 本論で用いたのと同様の議論が通用する.

問題 A が未解決な群のうち最も簡単な群は $G = C_{pqr}$ (p, q, r は互いに異なる素数) であろう. たとえば $V = U_p \oplus U_q \oplus U_r$, $W = U_1 \oplus U_{pq} \oplus U_{qr} \oplus U_{rp}$ とすると V, W は条件 $(C_{V,W})$ をみたしている. このとき

問題. isovariant 写像 $f : V \to W$ は存在するだろうか?

References

[1] T. tom Dieck, Transformation groups, Walte de Gruyter, Berlin, New York 1987.

[2] S. Kono, *On the existence of isovariant maps between complex representations of a cyclic group*, Talk at Transformation group seminar, Osaka University 1999.

[3] I. Nagasaki, *The weak isovariant Borsuk-Ulam theorem for compact Lie groups*, preprint.

[4] T. Takahara, *On the existence of isovariant maps for representations of a cyclic group.* (Japanese), Master thesis, Osaka University 1998.

[5] A. G. Wasserman, *Isovariant maps and the Borsuk-Ulam theorem*, Topology Appl. **38** (1991), 155–161.

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Toyonaka 560-0043, Osaka, Japan

E-mail address: `nagasaki@math.sci.osaka-u.ac.jp`